云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 1 讲

内容提要: 数项级数的概念与理论　　**Date:** March 20 2022

主讲人: Famiglisti @CC98　　**Place:** 碧 2 党员之家

1 知识概要

1. 常数项级数的定义、收敛定义、常数项级数的基本性质
2. 两个重要的常数项级数 (p 级数、几何级数)
   1.p 级数:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$;
   当 p>1 时, 级数收敛; 当 $p \leq 1$ 时, 级数发散
   2. 几何级数: $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$;
   当 $|q| \geq 1$ 时, 级数发散;
   当 $|q|$ <1 时, 级数收敛
3. 正项级数审敛法
   比较审敛法、比值审敛法、根值审敛法、积分审敛法
4. 交错级数及其审敛法
   莱布尼茨判别法
5. 绝对收敛与条件收敛

2 习题解析

Problem 1　设常数 k>0, 且正向级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n+k}$

[A] 绝对收敛

[B] 条件收敛

[C] 发散

[D] 敛散性与 k 有关

Problem 2　设正数列 $\{a_n\}$ 单调增加且有界，判断 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$ 的敛散性。

Problem 3 设 $0 \leq a_n < \frac{1}{n}$, 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$ 中那些级数一定收敛?

Problem 4 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

Problem 5 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \sqrt{n^2+1}\pi$ 的敛散性，当级数收敛时，判断是绝对收敛还是条件收敛。

Problem 6 设 f(x) 在 x=0 的邻域内二阶连续可导, 且 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-1}{x^2} = 2$. 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[f(\frac{1}{n}) - 1\right]$ 绝对收敛。

Problem 7 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n > 0)$ 发散,$S_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n$, 证明：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{S_n^2}$ 收敛。

Problem 8 设 $\mathrm{u}_n > 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = q$ 存在, 证明: 当 q>1 时,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; $q < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

Problem 9 设 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 又 $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,a]$ 上绝对收敛.

云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 2 讲

内容提要: 幂级数 **Date:** March 27 2022

主讲人: Famiglisti @CC98 **Place:** 碧 2 党员之家

1 知识概要

1. 函数项级数的定义
2. 幂级数基本定理——Abel 定理
3. 求收敛半径与收敛域的两种基本方法（根值、比值）
4. 幂级数的分析性质（连续性、逐项可导性、逐项可积性、收敛半径不变性）
5. 绝对收敛与条件收敛

2 基本题型

题型一：求幂级数的收敛半径和收敛域

根值法、比值法、换元法

【example 1】求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}(\frac{1-x}{1+x})^n$ 的收敛域

题型二：幂级数求和函数

别忘了求收敛半径和收敛域!

情形一： 求 $\sum_{n=0}^{\infty}P(n)x^n$ 的和函数，其中 P(n) 为 n 的多项式, 求和函数常用工具

a 级数的逐项可积性

b $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}(-1<x<1)$

c $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}(-1<x<1)$

【example1】$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}(x-1)^{2n+1}$

【example2】$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$

情形二： 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{P(n)}$ 的和函数，其中 P(n) 为 n 的多项式, 求和函数常用工具

a 级数的逐项可导性

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x)(-1 < x \leqslant 1)$

c $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)(-1 \leqslant x < 1)$

【example1】$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)2^n}$

【example2】$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n(2n-1)}$

情形三：幂级数系数的分母中含 n!, 求和函数常用工具

a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x(-\infty<x<+\infty)$

b $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}=\cos x(-\infty<x<+\infty)$

c $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin x(-\infty<x<+\infty)$

d 求和函数满足的微分方程

【example1】$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$

【example2】$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$ (-1<x<1)

情形四：求 $\sum_{n=0}^{\infty}P(n)x^n$ 的和函数, 其中 P(n) 为复杂分式，常通过换元等方法将分式化为标准多项式或标准分式

【example1】$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+1}x^n$

题型三：**函数展成幂级数**

积分法、微分法、裂项法、熟记常用级数展开公式

【example1】将 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展成 x 的幂级数

【example2】求 $\ln\frac{\sin x}{x}$ 在 x=0 的幂级数展开 (到 x^4)

题型四：特殊的常数项级数的求和

将数项级数中的 a^n 代换为 x^n, 并求和函数

【example1】$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}$

3 真题解析

【18-19mid】判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}$ 的敛散性

【18-19mid】将 $f(x)=\arcsin x$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(99)}(0)$

【18-19mid】设 $0 < a_0 < 1, a_{n+1} = a_n(1-a_n)(n = 0, 1, 2, \cdots)$, 证明

1. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛
2. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散

【18-19final】求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n+1}$ 的收敛半径与和函数

【19-20final】求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(2^n+3^n)n!}$ 的收敛半径

云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 3 讲

内容提要: 傅里叶级数　　　　**Date:** April 3 2022

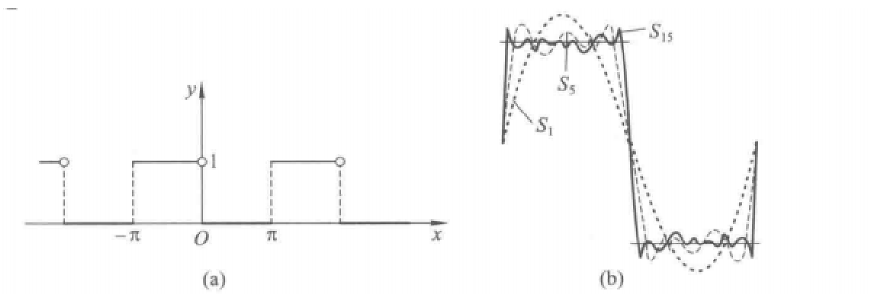
主讲人: Famiglisti @CC98　　　　**Place:** 碧 2 党员之家

数学主要的目标是公众的利益和自然现象的解释。–傅里叶

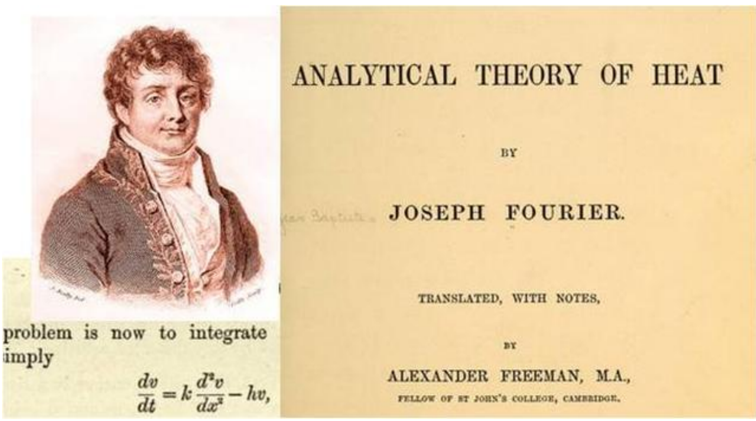
1 知识概要

1. **傅里叶分析之开创性**

   任何周期函数，都可以看作是不同振幅，不同相位正弦波的叠加。就像，利用对不同琴键不同力度，不同时间点的敲击，可以组合出任何一首乐曲。



   除了纯数学之外，主要的受益者不是热力学，而是工程学，特别是电子工程。傅里叶变换已经成为科学和工程中的常规工具; 它的应用包括从声音记录中去除噪音; 利用 x 射线衍射发现 DNA 等大型生物化学分子的结构; 改善无线电接收，处理从空中拍摄的照片。



2. **幂级数与傅里叶级数**

都用于将复杂函数转换成熟悉、易分析的简单函数，幂级数的局限性在于，用 Taylor 级数部分和近似代替函数 f(x) 时, 要求 f(x) 至少有 n 阶的导数, 且一般来说 Taylor 多项式仅在 x_0 附近与 f(x) 吻合得较为理想。与 Taylor 展开相比,Fourier 展开对于 f(x) 的要求要宽容很多, 并且它的部分和在整个区间都与 f(x) 吻合得较为理想。

3. **三角函数系及正交性**

傅立叶分析之所以有效，是因为它的基本波形既正交又完整，而且如果适当地叠加，它们足以表示任何信号。

三角函数系: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \cos 4x, \sin 4x \cdots\cdots$

a) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 2\pi, m = n = 0, \\ \pi, m = n \geq 1, \\ 0, m \neq n, \end{cases}$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi, m = n, \\ 0, m \neq n, \end{cases}$

4. **狄利克雷充分条件**

设函数 f(x) 是以 2π 为周期的函数, 若 f(x) 在 $[-\pi, \pi]$ 上满足:

a) f(x) 在 $[-\pi, \pi]$ 上连续或只有有限个第一类间断点

b) f(x) 在 $[-\pi, \pi]$ 上上只有有限个极值点

则函数 f(x) 可展开成三角级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 其中系数计算公式为

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

级数的收敛域为 $(-\infty, \infty)$

级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 与 f(x) 的关系:

a) 当 x 为 f(x) 的连续点时,$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=f(x)$

b) 当 x 为 f(x) 的间断点时,$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

5. **间断点**

函数连续的定义是什么?

a) 第一类间断点: $f(x_0+)\neq f(x_0-)$

b) 第二类间断点：左右极限至少有一个不存在

c) 第三类间断点：$f(x_0+)=f(x_0-),f(x_0)$

6. **定义于 $[0,\pi]$ 上 f(x) 的正弦级数与余弦级数**

step1: f(x) 奇延拓 or 偶延拓 F(x)

step2: 将 F(x) 在 $[-\pi,\pi]$ 上展成傅里叶级数

a) 奇延拓展成正弦级数

$$a_0=0$$
$$a_n=0$$
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

正弦级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$

b) 偶延拓展成余弦级数

$$\begin{aligned}a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx\\a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\\b_n&=0\end{aligned}\tag{1}$$

余弦级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

7. **一些变形**

a) 周期为 2l 的函数的傅里叶级数

b) 定义于 $[-l, l]$ 上的函数 f(x) 的傅里叶级数

c) 定义于 $[0, l]$ 上的函数 f(x) 的正弦级数与余弦级数

8. **Parseval 等式**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$$

成立条件,f 在 $[-\pi, \pi]$ 内平方可积, 推广形式:

$$\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx$$

成立条件,f,g 在 $[-\pi, \pi]$ 内平方可积

2 例题

【example 1】$f(x) = x^2 \quad (0 \le x < 1)$ 展成正弦级数级数, 设其和函数为 S(x), 求 $S(-3), S(-\frac{15}{2})$

【example 2】将函数 $f(x) = x^2 \quad (-\pi < x < \pi)$ 展成 Fourier 级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

【example 3】将函数 $f(x)=|x|\,(-\pi\le x\le\pi)$ 展成 Fourier 级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

3 真题解析

【18-19mid】将函数 $f(x)=e^x\quad(0\le x<2\pi)$ 展成周期为 2π 的 Fourier 级数

【19-20final】利用傅里叶级数理论证明:$\forall x\in(0,\pi),\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$

【20-21final】$f(x)=e^x\quad(0<x\le 1)$, 将 f 延拓成 $\mathbb{R}$ 上周期为 2 的函数，记为 f, 设其傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ ，求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,\sum_{n=1}^{\infty}a_n$

【20-21final】求 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+\frac{1}{2}}x^{2n}$ 的收敛半径、和函数

4 级数综合

【ex1】设 f(x) 在 $[0,+\infty]$ 上连续，且 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ 收敛，令 $a_n = \int_0^1 f(nx)\,dx$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n}$ 收敛

【ex2】求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$

【ex3】求 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!x^n}$ 的和函数

5 参考书目

1. 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2019.5
2. 汤家凤. 考研数学复习大全 [M]. 北京: 中国原子能出版社,2019.2
3. 谢惠民. 数学分析习题课讲义. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2004.1

云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 4 讲

内容提要: 空间解析几何、多元函数微分学 **Date:** April 10 2022

主讲人: Famiglisti @CC98 **Place:** 碧 2 党员之家

Part A：空间解析几何

1 知识概要

1. **混合积运算性质**

   a) **a,b,c** 共面 ⇔(**a,b,c**)=0

   b) **a,b,c=b,c,a=c,a,b**

   c) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})b-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

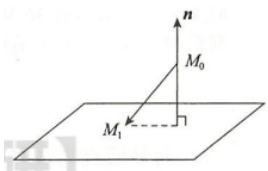
   d) Lagrouge 恒等式 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$

   e) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})\vec{c}-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\vec{d}=(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b}-(\vec{b},\vec{c},\vec{d})\vec{a}$

   f) $(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\times\vec{d},\vec{e}\times\vec{f})=(\vec{a},\vec{b},\vec{d})(\vec{c},\vec{e},\vec{f})-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{d},\vec{e},\vec{f})$

2. **几个距离公式**

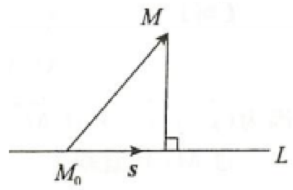
   a) 点到平面：$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$



   b) 点到直线：$d=\frac{\left|\vec{M_0M}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}$

   c) 两平行平面：$d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

   d) 两异面直线：$d=\frac{\left|\vec{M_1M_2}\cdot(\vec{v_1}\times\vec{v_2})\right|}{|\vec{v_1}\times\vec{v_2}|}$



3. **平面束方程及应用**

设 L:$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 为一条直线，则过 L 的所有平面成为过直线 L 的平面束，平面束方程为

$$\pi' : A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

对于空间直线和平面的问题，解题思路比较灵活，方法往往不唯一，通过对比发现，利用平面束方程求解，思路更加清晰，过程更简洁。(见例题 1、真题 1)

4. **曲面**

   a) 柱面

   b) 旋转曲面

      i. 二维空间曲线的旋转曲面

      ii. 三维空间直线的旋转曲面 (见真题 2)

2 例题

【example 1】求直线 L $\begin{cases} 2x-y+z=1 \\ x+y-z=-1 \end{cases}$ 在平面 $\pi : x+2y-z=0$ 上的投影直线的方程

3 真题解析

【18-19mid】求过点 A(-1,0,4) 且平行于平面 3x-4y+z=0, 又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程

【18-19mid】求直线 L $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转所成的旋转曲面方程

【18-19final】设有二次曲面 $S:x^2+xy+y^2-z^2=1$, 试求曲面 S 上点 (1,-1,0) 处的切平面 π 的平面方程。

【20-21final】求曲面 $S:z=x^2y^3-e^z+e$ 上点 (1,1,1) 处的切平面方程及法线方程

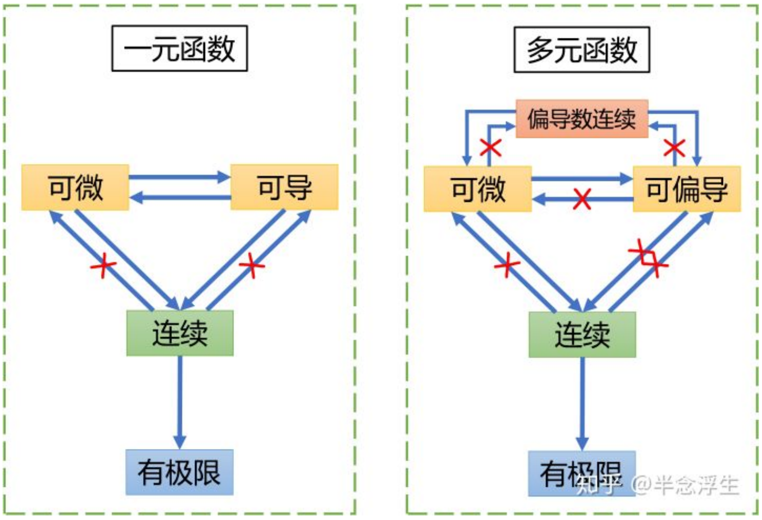
Part B：多元函数微分学

1 知识概要

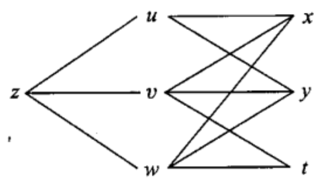
1. **点集拓扑学的一些术语**　　内点、外点、边界、开集、闭集、连通
2. **连续、可偏导、可微** (以二元函数为例)
   a) 连续：$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，称 f(x,y) 在 (x_0,y_0) 处连续
   b) 可偏导：$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，称 f(x,y) 在 (x_0,y_0) 处对 x 可偏导
   c) 可微：若 z=f(x,y) 在 (x,y) 处全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ 可表示为

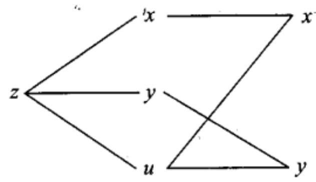
$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0)$$
$$A = f'_x(x,y), \quad B = f'_y(x,y)$$

   则称函数 f(x,y) 在点 (x,y) 处可微，其中全微分 $dz = A\Delta x + B\Delta y$
   d) 关系图解



3. **偏导数计算法则**
   a) 复合函数：链导法则
   b) 隐函数
      i. 由一个方程确定的隐函数
      ii. 由多个方程确定的隐函数——Jacobi 行列式法





2 例题

【example 1】设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ 研究函数 f(x,y) 在 (0,0) 处的连续性、可偏导性、可微性及一阶偏导的连续性。

3 真题解析

【18-19mid】已知 $z=(e^x+y^2)^y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

【18-19mid】设 $u=u(x,y)$ 对新变量 ξ,η 具有二阶偏导数, 求 a, 使得在变换 $\xi=x+ay,\eta=x-y$ 下，将方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$

【18-19final】设 f(x,y) 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的一阶偏导数，且 $\forall t>0, \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(tx,ty)=t^3f(x,y)$ 证明：$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3f(x,y)$

【18-19final】设 $f(x,y)=(xy)^{\frac{2}{3}}$,

1. 求 $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
2. 证明：f 在点 (0,0) 处可微

【19-20final】设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$ 试求 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$

【19-20final】证明：$\forall x \in (0,1), y \in (0,+\infty)$, 不等式 $y(1-x)x^{y+1} < e^{-1}$ 成立.

【20-21final】设 z=f(u,v) 在平面上可微，且满足

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2+1, e^x) = e^{(x+1)^2}, f(x^2, x) = x^2 e^{x^2}$$

求 f 在点 (1,1) 处的全微分 $df|_{(1,1)}$

【20-21final】设 D 是平面上的一个有界闭区域,z=z(x,y) 在 D 上连续，在 D^o 上有所有的连续二阶偏导函数，且满足 $\forall (x,y) \in D^o, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = 0, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x,y) \neq 0$
证明：z(x,y) 在 D 上的最值只能在 D 的边界上取到。

4 参考文献

1. 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2019.5
2. 汤家凤. 考研数学复习大全 [M]. 北京: 中国原子能出版社,2019.2
3. 谢惠民. 数学分析习题课讲义. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2004.1
4. 张艳敏, 申子慧. 平面束方程的详细证明及应用举例 [J]. 湖南理工学院学报 (自然科学版),2016,29(04):20-23.DOI:10.16740/j.cnki.cn43-1421/n.2016.04.004.
5. 苏德矿， 吴明华. 微积分. 下 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007.7
6. 丘维声. 解析几何.3 版 [M]. 北京：北京大学出版社,2015.7

云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 5 讲

内容提要: 多元函数微分学的应用 **Date:** May 1 2022

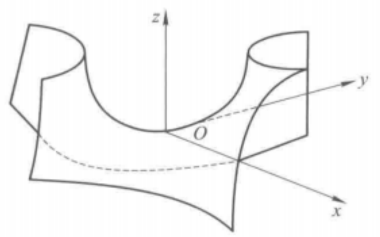
主讲人: Famiglisti @CC98 **Place:** 碧 2 党员之家

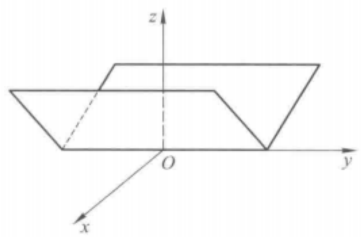
1 知识概要

1. **多元函数的极值**

   a) **驻点与极值的关系**

   - 使函数 f 的各个一阶偏导数同时为零的点为驻点
   - 而驻点不一定为极值点
   - 偏导数不存在的点也可能是极值点





   b) **求无条件极值步骤**

   i. 由 $\begin{cases} f_x(x_0,y_0)=0 \\ f_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$ 求出驻点

   ii. 设 (x_0,y_0) 为一个驻点,另 $A=f_{xx}(x_0,y_0), B=f_{xy}(x_0,y_0), C=f_{yy}(x_0,y_0)$

   - $AC-B^2>0$
     - 若 A>0,(x_0,y_0) 为极小值点
     - 若 A<0,(x_0,y_0) 为极大值点
   - $AC-B^2<0$ ，(x_0,y_0) 一定不是极值点
   - $AC-B^2=0$，无法确定 (x_0,y_0) 是否为极值点

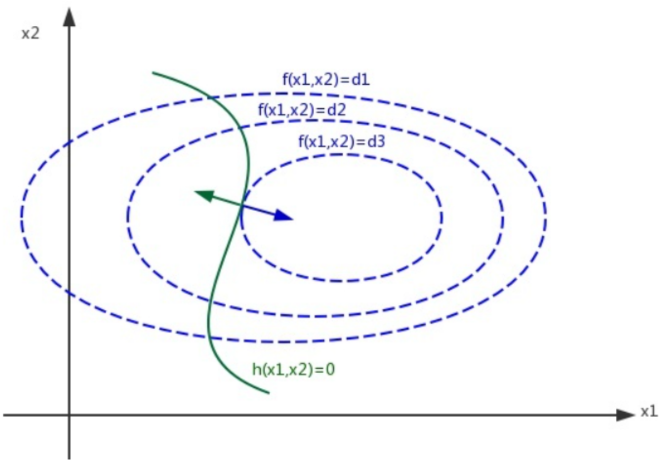
   求无条件极值公式的推导理解了没 QAQ

c) **条件极值：拉格朗日乘数法**

基本方法要掌握

几何解释：

- 等式约束优化



假设优化变量为 x_1, x_2，蓝色虚线为目标函数 $f(x_1, x_2)$ 的等高线，绿线表示约束条件 $h(x_1, x_2) = 0$，因此最优解 x_1^*, x_2^* 一定在绿线上。绿线与蓝色等高线可能相交、相切或没有交点。讨论取到最优解的情形，先排除无交点的情况。若绿线与蓝线相交，说明绿线上存在点在这条等高线的内部和外部，也就说明存在点使得目标函数的值更大或者更小，所以相交的情况也不会是优化问题的可行解。因而蓝线与绿线相切的情况，可能会是优化问题可行解。在代表约束条件的绿线与蓝色等高线相切的情况下，它们的切线相同，法向量相互平行，于是有 λ:

$$f_{x_1}(x_1, x_2) + \lambda h_{x_1}(x_1, x_2) = 0$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2) + \lambda h_{x_2}(x_1, x_2) = 0$$

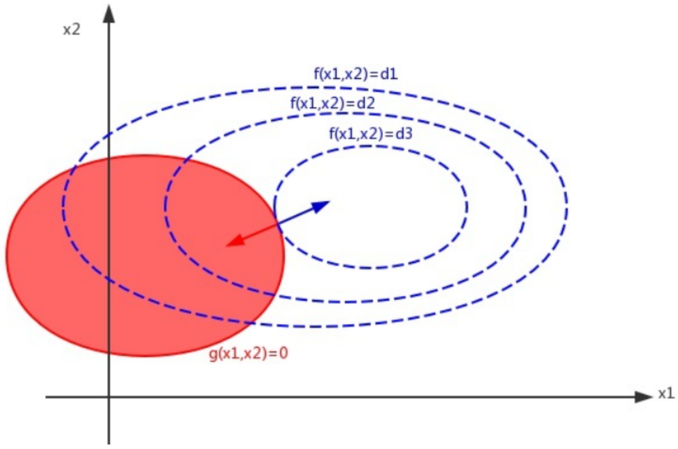
与拉格朗日乘数法的方程相同。

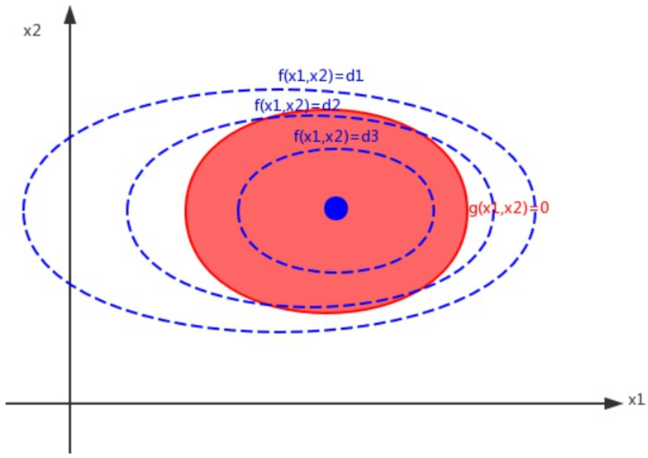
- 不等式约束优化

  设有优化条件：$\min f(x_1, x_2), g(x_1, x_2) \leqslant 0$

  – 当目标函数的最优解不在约束条件区域时，优化问题的解 x_1^*, x_2^* 位于 $g(x_1^*, x_2^*) = 0$ 即边界上，此时优化问题等价为等式约束优化问题

  – 当目标函数 $f(x_1, x_2)$ 的最优解落在约束条件区域，优化问题的解 x_1^*, x_2^* 位于 $g(x_1^*, x_2^*) < 0$ 的区域内，此时，直接极小化目标函数即可





2. **多元函数微分学在几何上的应用**

   a) **方向导数与梯度**

   - 方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(p_0) = \lim_{t \to 0+} \frac{f(p_0 + t\vec{l}) - f(p_0)}{t}$$

f 在点 p_0 点沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数表示该点沿方向 $\vec{l}$ 的变化率

特别地

     – 若 $\vec{l} = (1,0,0), \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(p_0) = f_x(p_0)$

     – 若 $\vec{l} = (0,1,0), \frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(p_0) = f_y(p_0)$

若 f 在 p_0 点可微，则 f 在 p_0 点沿任何方向 $\vec{l}$ 的方向导数存在，且

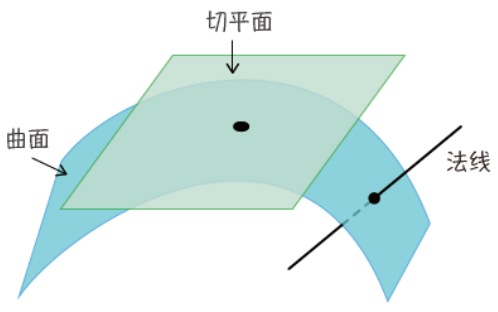
$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}(p_0)\cos\gamma$$

- 梯度

$$gradf(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\vec{k}$$

梯度的方向是函数在该点增长最快的方向

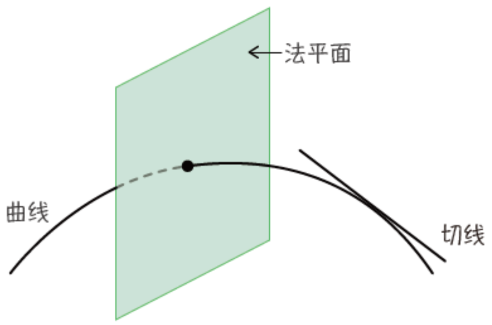
b) **空间曲面的切平面与法线**



曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为:

$$\pi: F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

c) **空间曲线的切线与法平面**



曲线 L: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面方程为:

$$\pi: \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}_{M_0}\cdot(x-x_0)+\begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}_{M_0}\cdot(y-y_0)+\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}_{M_0}\cdot(z-z_0)=0$$

2 例题

【example 1】设 $\vec{n}$ 为曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 P(1,1,1) 处的外法向量, 求 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿 $\vec{n}$ 的方向导数

【example 2】设 F(u,v) 一阶连续可微，证明：曲面 $F(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$ 上任意一点处的切平面都过一个固定点。

【example 3】设 f(x,y) 在 $p_0(x_0,y_0)$ 点可微，$\vec{l_1},\cdots,\vec{l_n}$ 为 n 个单位向量，相邻两向量夹角为 $\frac{2\pi}{n}$. 证明：$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \vec{l_i}}(x_0,y_0)=0$

【example 4】在平面上给定不在同一条直线上的三点 $M_i(a_i,b_i), i=1,2,3$, 求平面内的这样一点，使它至此三定点的距离之和最小。

【example 5】椭球面 $\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}=1$ 被通过原点的平面 $2x+y+z=0$ 截成一个椭圆 l, 求此椭圆的面积

【example 6】求 $f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 的最大值，其中 $x^2+y^2+z^2=6r^2(r>0), x>0, y>0, z>0$, 且证明对任何正数 a,b,c, 有

$$ab^2c^3\leq 108(\frac{a+b+c}{6})^6$$

3 真题解析

【18-19final】设有二次曲面 $S: x^2+xy+y^2-z^2=1$, 试求曲面 S 上点 (1,-1,0) 处的切平面 π 的平面方程。

【18-19final】设 f(x,y) 在包含单位闭圆盘 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的一个开集上具有连续的一阶偏导函数，且满足 $\forall(x,y)\in D, |f(x,y)|\leqslant 1$
试证：存在一点 $(x^*,y^*)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<1\}$ 使得 $[f_1'(x^*,y^*)]^2+[f_2'(x^*,y^*)]^2\leqslant 16$ 成立

【19-20final】设 $f(x,y)=x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, 试求 f 在点 (0,0) 处沿方向 $\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}(0,0)$, 并求当该方向导数取到最大值时，对应的 $\sin\alpha$ 的值

【20-21final】设 D 是平面上的一个有界闭区域,z=z(x,y) 在 D 上连续，在 D^o 上有所有的连续二阶偏导函数，且满足 $\forall(x,y)\in D^o, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)=0, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)\neq 0$
证明：z(x,y) 在 D 上的最值只能在 D 的边界上取到。

5 参考书目

1. 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2019.5
2. 汤家凤. 考研数学复习大全 [M]. 北京: 中国原子能出版社,2019.2
3. 谢惠民. 数学分析习题课讲义. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2004.1
4. 苏德矿，吴明华. 微积分. 下 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007.7

云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 习题课 01

内容提要: 习题课 **Date:** May 8 2022

主讲人: Famiglisti @CC98 **Place:** 碧 2 党员之家

0.1 多元函数微分学

【18-19final】设 f(x,y) 在包含单位闭圆盘 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 的一个开集上具有连续的一阶偏导函数，且满足 $\forall(x,y)\in D, |f(x,y)|\leqslant 1$
试证：存在一点 $(x^*,y^*)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<1\}$ 使得 $[f_1'(x^*,y^*)]^2+[f_2'(x^*,y^*)]^2\leqslant 16$ 成立

【20-21final】设 D 是平面上的一个有界闭区域,z=z(x,y) 在 D 上连续，在 D^o 上有所有的连续二阶偏导函数，且满足 $\forall(x,y)\in D^o, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y)=0, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(x,y)\neq 0$
证明：z(x,y) 在 D 上的最值只能在 D 的边界上取到。

【example 1】设 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$,(a>b>c>0), 求在 (0,0,0) 处函数增长最快的方向。

【example 2】求由方程

$$2x^2+y^2+z^2+2xy-2x-2y-4z+4=0$$

所确定的函数 z=z(x,y) 的极值

【example 3】设 F(u,v) 一阶连续可微，证明：曲面 $F(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c})=0$ 上任意一点处的切平面都过一个固定点。

0.2 几何学

【example 1】求曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2y-4=0 \\ G(x,y,z)=x+y+z=0 \end{cases}$ 在 (1,1,-2) 处的切线和法平面的方程。

【example 2】求过点 P(1,1,1) 且与两直线 $l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}, l_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 都相交的直线的方程。

0.3 级数

【ex1】设 f(x) 在 $[0, +\infty]$ 上连续，且 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\,dx$ 收敛, 令 $a_n = \int_0^1 f(nx)\,dx$, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n}$ 收敛

【ex3】求 $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!x^n}$ 的和函数

云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 6 讲

内容提要: 二重积分 **Date:** May 15 2022

主讲人: Famiglisti @CC98 **Place:** 碧 2 党员之家

1 知识概要

1. **一些概念**
    - 区域分割、区域的直径
    - 区域的面积、零面积
    - 黎曼积分 vs 勒贝格积分
2. **二重积分的一些性质**
    - 积分中值定理
      设 f(x,y) 在平面有限闭区域上连续,A 为 D 的面积,则存在 $(\xi, \eta) \in D, s.t. \iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)A$
    - 线性性、可加性、区域可加性
3. **计算技巧**

    a) 对称区域求积
    - 区域 D 关于 y 轴对称, 右侧区域为 D_1
        - 当 f(-x,y)=f(x,y) 时，$\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$
        - 当 f(-x,y)=-f(x,y) 时，$\iint_D f(x,y)dxdy = 0$
    - 区域 D 关于 x 轴对称, 上侧区域为 D_1
        - 当 f(x,-y)=f(x,y) 时，$\iint_D f(x,y)dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)dxdy$
        - 当 f(x,-y)=-f(x,y) 时，$\iint_D f(x,y)dxdy = 0$
    - 区域 D 关于 y=x 对称,$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(y,x)dxdy$
    - 区域 D 关于 y=-x 对称,$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(-y,-x)dxdy$

b) 坐标变换

- 变量替换公式推导
  设 $x = x(u,v), y = y(u,v), (u,v) \in D'$
  这一代换满足：

  i. 建立了 D 与 D' 之间的一一对应；

  ii. x,y 在 D' 内具有各个变元的连续偏导数，并且其逆变换 u=u(x,y),v=v(x,y) 在 D 内也具有各个变元的连续偏导数

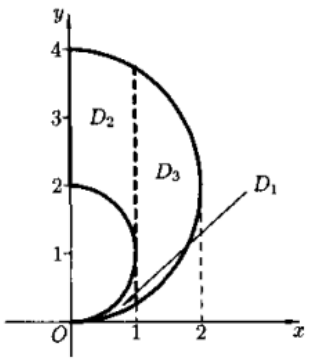
  iii. 代换的 Jacobi 行列式 $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 在 D' 内无零点

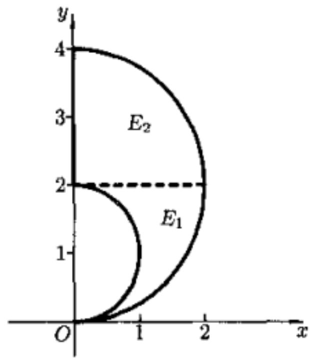
  则，$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D' f(x(u,v),y(u,v))|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}|dudv$

- 极坐标变换
  $\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rf(r\cos\theta, r\sin\theta)\,dr$ 用极坐标计算二重积分一般至少需要满足如下两个特征之一：

  - 积分区域的边界曲线含 $x^2 + y^2$
  - 被积函数 f(x,y) 的表达式中含 $x^2 + y^2$

c) x 型区域与 y 型区域





4. **应用**

设 $\sum : z = \varphi(x,y)((x,y) \in D)$ 为空间曲面，则该曲面段的面积为：

$$A = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} d\sigma$$

2 例题

【example 1】设 $l: x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$ φ, ψ 连续，且至少其中之一有连续导数，则曲线 l 的面积为零。

【example 2】求由曲线 $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 所围的面积。

【example 3】求 $\iint(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}})dxdy$, 其中 D 由曲线 $\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}=1, x=c, y=c$ 围成，且 a,b,c>0 【example 4】求 $I=\iint_{\Omega}(x+y)dxdy$，其中 Ω 由 $y^2=2x, x+y=4, x+y=12$ 围成

【example 5】设 $D: x^2+y^2 \leq 4$, 则 $\iint_D (x-2y)^2 d\sigma =$

【example 6】设 $D: x^2+y^2 \leq 1 (x \geq 0, y \geq 0)$, 则 $\iint_D \frac{x^2 \sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} d\sigma =$

5 参考书目

1. 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2019.5
2. 汤家凤. 考研数学复习大全 [M]. 北京: 中国原子能出版社,2019.2
3. 谢惠民. 数学分析习题课讲义. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2004.1
4. 苏德矿，吴明华. 微积分. 下 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007.7

云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 7 讲

内容提要: 三重积分 **Date:** May 22 2022

主讲人: Famiglisti @CC98 **Place:** 碧 2 党员之家

1 preface

时间过得太快太快~

本学期微积分的内容只剩下第一类曲线积分、第二类曲面积分，按照历年情况，重积分、曲线、曲面积分在期末考卷中占有较大的分值:

- 21.6 6 题 50-60 分，1 三重积分，3 曲线积分，2 曲面积分
- 20.9 6 题 50-60 分，1 二重积分，1 三重积分，2 曲线积分，2 曲面积分
- 19.6 6 题 50-60 分，1 二重积分，1 三重积分，2 曲线积分，1 曲面积分，1 二重积分与曲面积分结合

积分题目，涉及到大量的计算，容易出错，大家做题的时候仔细些，耐心一些，问题不大。同时，对于积分计算中的常用技巧，如对称区域求积、变量替换法、极坐标法需熟练掌握，由于这些内容在上一份讲义中以详细解说过，本次课程不再重复讲解。

另外，重积分的物理应用，质量、质心坐标、转动惯量怎么求也需要知道。

这次课程我们先来做一些历年考卷中涉及二重积分、三重积分的题目，熟悉一下应试难度，之后再做一些积分相关证明题。

2 真题

【18-19final】试求三重累次积分 $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_y^1 \frac{e^{-z^2}}{x^2+1} dz$

【18-19final】设 $\mathbb{R}^3$ 中有一抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le x\le 1)$, 已知其面密度为正常数 c, 试求其重心坐标。

【19-20final】求 $\mathbb{R}^3$ 中封闭曲线 S 由二元连续函数 $\rho=\rho(\theta,\varphi),(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi],(\rho,\theta,\varphi)$ 为球坐标, 证明：S 所围的有界闭立体 Ω 的体积为

$$V(\Omega)=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}[\rho(\theta,\varphi),(\theta,\varphi)]^3\sin\varphi\,d\varphi$$

【19-20final】求封闭曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 所围的空间有界闭立体 K 的体积 V(K)

【20-21final】设 $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \le z\}$, 计算 $\iiint_K (z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dxdydz$

3 例题

【example 1】设 f(u) 为连续函数, $F(t) = \iiint_\Omega [z^2 + f(x^2 + y^2)] dv$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | 0 \le z \le h, x^2 + y^2 \le$
求 $\lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$

【example 2】设 $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 均为 $[0,1] \times [0,1]$ 中的连续函数，且在 $[0,1] \times [0,1]$ 中成立 $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 和 $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le 1$, 证明:

1. 对任何 $(x, t_1), (x, t_2) \in [0,1] \times [0,1]$，存在 $\xi \in [0,1], s.t. |\xi - x| \le \frac{1}{2}|t_1 - t_2|$ 且 $|f(\xi, t_1) - f(\xi, t_2)| \le 4|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}$

2. 由 (1) 的结论证明，对任何 $(x, t_1), (x, t_2) \in [0,1] \times [0,1]$ 成立 $|f(x, t_1) - f(x, t_2)| \le 5|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}$

提示：交换积分次序

【example 3】若直线 x=0,x=a,y=0 与正连续曲线 y=f(x) 围成的区域的质心的 x 坐标是 g(a), 证明:

$$f(x) = \frac{Ag'(x)}{[x-g(x)]^2} exp(\int \frac{1}{x-g(x)}\,dx)$$

其中 A 为正常数，a 是参数

4 参考书目

1. 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2019.5
2. 汤家凤. 考研数学复习大全 [M]. 北京: 中国原子能出版社,2019.2
3. 谢惠民. 数学分析习题课讲义. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2004.1
4. 苏德矿，吴明华. 微积分. 下 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007.7

云峰朋辈辅学微甲提升 2 组 — 第 8 讲

内容提要: 曲线积分 **Date:** May 29 2022

主讲人: Famiglisti @CC98 **Place:** 碧 2 党员之家

1 知识概要

1. **第一类曲线积分————对弧长的曲线积分**

   $\int_L f(x,y)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$

   $\int_L f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\varsigma_i)\Delta s_i$

   积分可视化:

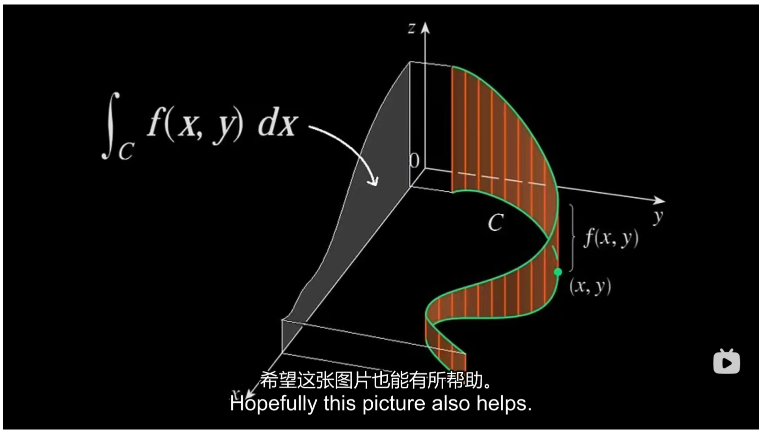


图 1: 积分值为红色区域面积

   $\int_L ds = l$,l 为曲线长度

2. **第二类曲线积分————对坐标的曲线积分**

   a) 二维空间: $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

   b) 三维空间: $\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$

   $\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_L (P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta)ds$

   $\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz = \int_L (P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma)ds$

3. **Green 公式**

   $\iint_D(-\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x})dxdy=\int_{\partial D}Pdx+Qdy$

   使用条件：

   - D 为 $\mathbb{R}^2$ 内的一个有界闭区域
   - ∂D 由光滑曲线或逐段光滑曲线组成
   - 函数 P(x,y),Q(x,y) 在 D 内有关于自变量 x,y 的连续偏导数
   - ∂D 的方向关于 D 是正向的

   推论：由逐段光滑的简单曲线 C 所界的面积 S 可用曲线积分表示为 $S=\oint_C xdy=-\oint_C ydx=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$

2 真题

【18-19final】设曲线 C 为一元函数 $y=\int_1^x\sqrt{sin(t^2)}dt, x\in[1,\sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ 的图像，试计算第一类曲线积分 $\int_C xds$

【18-19final】设 γ 为圆柱螺线的一段 $x=\cos t, y=\sin t, z=2t, 0\le t\le\pi$ 其中 γ 的正向为参数 t 增加的方向，并设 γ_1 为 γ 的前半段有向弧 $(t\in[0,\frac{\pi}{2}])$, 其正向与 γ 一致，又设 L 为圆柱螺线 γ 上点 $(0,1,\pi)$ 处的切线，并设 L_1 为切线 L 上一段以点 $(0,1,\pi)$ 为起点，正向与 γ 正向一致，长度为 $\sqrt{5}$ 的有向直线段，试计算第二类曲线积分 $\int_{\gamma_1\cup L_1}yzdx+xzdy+xydz$

【18-19final】设 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le x\le 1,y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, 其中 $y=y_1(x),y=y_2(x)$ 是 [0,1] 上的连续函数，u(x,y) 在包含 D 的一个开集上有连续的一阶偏导函数，设 D 的边界 ∂D 的正向为逆时针方向
证明：$\oint_{\partial D} udx=-\iint\frac{\partial u}{\partial y}dxdy$

【19-20final】设二元函数 P(x,y),Q(x,y) 在平面但联通区域 D 上有所有连续的一阶偏导函数, 且在 D 内的任意一条光滑的简单封闭曲线 C 上, 都有 $\oint_{C+}P(x,y)dy-Q(x,y)dx=0$ 成立。试证明在 D 内有 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0$ 恒成立

【20-21final】设空间曲线 C 为 $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x=t,y=\frac{t^2}{2},z=\frac{t^3}{3},t\in[0,e]\right\}$, 计算第一类曲线积分

$$I_1=\int_C\frac{xz}{\sqrt{1+2y+4y^2}}ds$$

3 例题

【example 1】计算积分

$$I=\oint_C \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds$$

其中 C 为逐段光滑的简单闭曲线,(0,0) 在 C 外,$\vec{r}=(x,y)$,$r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$,$\vec{n}$ 为 C 上的单位外法向量。

思考：(0,0) 在 C 内,(0,0) 在 C 上的情形

【example 2】计算

$$I=\oint_C \frac{e^y}{x^2+y^2}[(x\sin x+y\cos x)dx+(y\sin x-x\cos x)dy]$$

其中 $C:x^2+y^2=1$, 取逆时针方向

【example 3】设 a,b,c 为常数，满足 $ac - b^2 > 0$,

$$w = \frac{xdy - ydx}{ax^2 + 2bxy + cy^2}$$

求 w 关于原点 (0,0) 的循环常数 $\oint_C w$, 其中 C 可取围绕 (0,0) 的任一简单封闭曲线，并取逆时针方向为正向

【example 4】计算 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在第一卦限部分的边界的质心坐标

4 参考书目

1. 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2019.5
2. 汤家凤. 考研数学复习大全 [M]. 北京: 中国原子能出版社,2019.2
3. 谢惠民. 数学分析习题课讲义. 下册 [M]. 北京: 高等教育出版社,2004.1
4. 苏德矿， 吴明华. 微积分. 下 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007.7